

Reg. No. :

Code No. : 30579 B Sub. Code : SMMA 62

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2020.

Sixth Semester

Mathematics — Core

NUMBER THEORY

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer

1. $41+42+\dots+78$ ன் மதிப்பு

(அ) 3081 (ஆ) 2261

(இ) 2061 (ஈ) 1661

The sum of $41+42+\dots+78$ is

(a) 3081 (b) 2261

(c) 2061 (d) 1661

2. n ஒரு மிகை முழு எண் மேலும் $r \leq n$ ஒரு மிகை முழு எண் எனில் $nc_r + nc_{r-1}$ ன் மதிப்பு

(அ) $n+1c_r$ (ஆ) $n+1c_{r+1}$

(இ) nc_r (ஈ) nc_{r+1}

If n is a given positive integer, and $r \leq n$ is also a positive integer, than the value of $nc_r + nc_{r-1}$

(a) $n+1c_r$ (b) $n+1c_{r+1}$

(c) nc_r (d) nc_{r+1}

3. மீ.பொ.வ $(-8, -36) =$ _____

(அ) -8 (ஆ) -4

(இ) 4 (ஈ) 8

$\gcd(-8, -36) =$ _____

(a) -8 (b) -4

(c) 4 (d) 8

4. K பூசியமல்லாத முழு எண் எனில் மீ.பொ.வ. $(ka, kb) = ?$

(அ) K மீ.பொ.வ (a, b) (ஆ) $|K|$ மீ.பொ.வ (a, b)

(இ) மீ.பொ.வ (a, b) (ஈ) k^2 மீ.பொ.வ (a, b)

For any interger $k \neq 0$, $\gcd(ka, kb) = ?$

- (a) $K \cdot \gcd(a, b)$
- (b) $|K| \gcd(a, b)$
- (c) $\gcd(a, b)$
- (d) $k^2 \gcd(a, b)$

5. எண் 30 க்கும் குறைவான உள்ள ஒற்றைப்படை பகா எண்களின் எண்ணிக்கையானது.

- (அ) 8 (ஆ) 9
- (இ) 10 (ஈ) 11

The number of odd prime less than 30 is

- (a) 8 (b) 9
- (c) 10 (d) 11

6. வகுத்தல் செய்வழிப்படி, ஒவ்வொரு இரட்டைப்படை மிகை எண்ணையும் தனிச்சிறப்புப்பட _____ என எழுத முடியும்.

- (அ) $4n+1$
- (ஆ) $4n+3$
- (இ) $4n(or)4n+2$
- (ஈ) இவையேதும் இல்லை

According to division algorithm, every positive even integer can be uniquely written as

- (a) $4n+1$ (b) $4n+3$
(c) $4n(or)4n+2$ (d) None of these

7. $6x \equiv \text{—————} \pmod{21}$ என்ற முற்றொருமையானது தீர்வுகளைக் கொண்டதாகும்.

- (அ) 3 (ஆ) 2
(இ) 6 (ஈ) 8

The congruence $6x \equiv \text{—————} \pmod{21}$ has solutions.

- (a) 3 (b) 2
(c) 6 (d) 8

8. உலகத்தர புதிதாக எண்ணின் பத்தாம் இலக்கம் $a_{10} =$

(அ) $\sum_{k=1}^9 Ka_k \pmod{11}$

(ஆ) $\sum_{k=1}^9 a_k \pmod{11}$

(இ) $\sum_{k=1}^9 (K+1)a_k \pmod{11}$

(ஈ) $\sum_{k=1}^{10} Ka_k \pmod{11}$

In ISBN, the tenth digit a_{10} is given by

(a) $\sum_{k=1}^9 Ka_k \pmod{11}$

(b) $\sum_{k=1}^9 a_k \pmod{11}$

(c) $\sum_{k=1}^9 (K+1)a_k \pmod{11}$

(d) $\sum_{k=1}^{10} Ka_k \pmod{11}$

9. $\phi(225)$ ன் மதிப்பு

(அ) 15

(ஆ) 45

(இ) 75

(ஈ) 120

The value of $\phi(225)$ is

(a) 15

(b) 45

(c) 75

(d) 120

10. P ஒரு ஒற்றைப்படை பகா எண் எனில் $1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1}$ ஐ P வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி யாது?

- (அ) 1 (ஆ) 2
(இ) $\frac{p-1}{2}$ (ஈ) $p-1$

If P is an odd prime find the remainder when $1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1}$ is divided by P .

- (a) 1 (b) 2
(c) $\frac{p-1}{2}$ (d) $p-1$

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) (i) முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் ஒரு முக்கோண இயல் எண் ஆகும் என நிரூபி.
(ii) அடுத்தடுத்த இரண்டு முக்கோண எண்களின் கூடுதல் ஒரு முழுமையான வர்க்கம் என நிரூபி.
(i) Prove that the sum of first n natural numbers is a triangular number.
(ii) The sum of any 2 consecutive triangular numbers is a perfect square.

Or

(ஆ) அனைத்து $n \geq 2$ க்கும்

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{3} \text{ ன் மதிப்பு}$$

காண்க.

For $n \geq 2$, Find the value of

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{3}.$$

12. (அ) a, b, c ஆகியன பூச்சியமற்ற ஏதேனும் இரண்டு முழுக்களைக் கொண்ட முழு எண்கள் $d = \text{மீ.பொ.வ. } (a, b, c)$

$$d = \text{மீ.பொ.வ.}(\text{மீ.பொ.வ.}(a, b), c)$$

$$= \text{மீ.பொ.வ.}(a, b, c) = (a, \text{மீ.பொ.வ.}(b, c)) \text{ என நிரூபிக்க.}$$

Let a, b, c be integers no two of which are zero. Show that $d = \gcd(a, b, c)$

$$d = \gcd(\gcd(a, b), c)$$

$$= \gcd(a, b, c) = (a, \gcd(b, c))$$

Or

(ஆ) $\text{மீ.பொ.வ.}(a, b) \cdot \text{மீ.சி.ம.}(a, b) = ab$ என நிரூபி.

Prove that $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = ab$ for positive integers.

13. (அ) என்ற எண்களின் பகா காரணியை கண்டுபிடி.

(i) 10140

(ii) 36000

Find the prime factorization of

(i) 10140

(ii) 36000

Or

(ஆ) n -வது பகா எண் P_n எனில் $P_n \leq 2^{2^{n-1}}$ என நிரூபி.

If P_n is the n^{th} prime number, then prove that $P_n \leq 2^{2^{n-1}}$.

14. (அ) $41^{65} \equiv 6 \pmod{7}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

Calculate $41^{65} \equiv 6 \pmod{7}$.

Or

(ஆ) $18x \equiv 30 \pmod{42}$ என்ற நேரியல் முழு ஒப்புமை சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

Solve the linear congruence $18x \equiv 30 \pmod{42}$

15. (அ) பெர்மாட்டின் மறுதலையை ஒரு எடுத்துக்காட்டு கொடுத்து விளக்குக.

Explain about the converse of the Fermat's theorem by giving an example.

Or

- (ஆ) P ஒரு பகா எண் எனில், எந்தவொரு முழு எண் a க்கும் $P \mid a^p + (p-1)!$ மற்றும் $P \mid (p-1)! a^p + a$ என நிரூபி.

If P is a prime, prove that for any integer $a, P \mid a^p + (p-1)!$ and $P \mid (p-1)! a^p + a$.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) ஈருறுப்பு தேற்றத்தை நிர்மாணிக்கவும்.

Establish the binomial theorem.

Or

- (ஆ) (i) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) =$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \geq 1$$

என நிரூபி.

- (ii) தொகுத்தறி முறை (முடிவுறு) யின் இரண்டாம் கொள்கையை எழுதி நிரூபிக்க.

(i) Prove that

$$1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \geq 1.$$

(ii) State and prove the second principle of finite induction.

17. (அ) யூக்ளிடியன் படிமுறைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Euclidean Algorithm.

Or

(ஆ) (i) a/b மற்றும் a/c எனில் $a \mid (bx + cy), x, y \in Z$ என நிரூபி.

(ii) வகுத்தல் கணக்கு முறையை எழுதி நிரூபிக்க.

(i) If a/b and a/c , prove that $a \mid (bx + cy), x, y \in Z$.

(ii) State and prove Division Algorithm.

18. (அ) எண்ணியலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove fundamental theorem of arithmetic.

Or

(ஆ) (i) பகா எண்கள் எண்ணிலடங்காதவை எனக் காட்டுக.

(ii) $\sqrt{2}$ ஒரு கூறுபடா எண் என நிரூபி.

(i) Show that there are infinite number of primes.

(ii) Show that the number $\sqrt{2}$ is irrational

19. (அ) (i) சைனிஸ் மீதித் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(ii) தீர்க்க, $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$,
 $x \equiv 2 \pmod{7}$.

(i) State and prove Chinese Remainder theorem.

(ii) Solve

$$x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 2 \pmod{7}.$$

Or

(ஆ) (i) $a \equiv b \pmod{m}$ மேலும் $f(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$ என நிரூபி.

(ii) முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி பெர்மாட்ஸ் எண் $F_5 = 2^{32} + 1$ ஒரு பகா எண் அல்ல என நிரூபி.

- (i) If $a \equiv b \pmod{m}$ and $f(x)$ is a polynomial coefficient, show that $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.
- (ii) Using congruences prove that the Fermat's number $F_5 = 2^{32} + 1$ is not a prime.

20. (அ) $a^{21} \equiv a \pmod{15}$ எனக் காட்டுக.

Show that $a^{21} \equiv a \pmod{15}$.

Or

(ஆ) வில்சன் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Wilson's theorem.
